

## Xây dựng bài toán động học, động lực học cho mô hình máy khắc laser

### Building kinematic and dynamic problems for laser engraving models

Hoàng Ngọc Hải, Đoàn Nguyên Vũ, Nguyễn Trương Công Thắng,  
Nguyễn Quang Thành\*, Ngô Kiều Nhi

*PTN Cơ học Ứng dụng, Trường Đại học Bách khoa TP HCM*

*\*Email: nqthanh@hcmut.edu.vn*

*Tel: +84-8378637868; Mobile: 0973 184 199*

---

#### Tóm tắt

##### *Từ khóa:*

Máy khắc laser, Động học, Động học ngược, Động lực học, Động lực học ngược.

Hiện nay hệ thống điều khiển máy khắc, cắt laser đã và đang được ứng dụng rộng rãi trong chế tác các sản phẩm trong các lĩnh vực nông nghiệp, công nghiệp và giáo dục. Với việc điều khiển bằng máy tính, máy khắc laser có thể cắt kim loại theo những đường cong dễ dàng như đường thẳng, thậm chí là đục rỗng bên trong khối phôi, tia những đường hoa văn chính xác với vận tốc nhanh hơn rất nhiều so với máy CNC thông thường. Nghiên cứu đi vào tính toán động lực học máy khắc laser và mô phỏng quá trình vận hành của máy trong quá trình hoạt động. Các kết quả nghiên cứu là tiền đề cho quá trình vận hành và điều khiển các loại máy khắc laser tự chế tạo tại Việt Nam hiện nay.

#### Abstract

##### *Keywords:*

Laser engraving, Kinematics, Reverse dynamics, Dynamics, Reverse dynamics.

Currently the systems of laser cutting and engraving machines have widely been applied in manipulating many products in agricultural, industrial and educational fields. Under the control of computer systems, laser engraving machines can cut metals following some curves easily like the straight lines, not to mention the opaque in the drafts, trim patterns accurately with faster speed than traditional CNC machines. This research has been carried out to calculate dynamics for laser engraving machines and emulate their operating process during working process. The findings lay the foundation for the process of operating and controlling laser engraving machines presently self-manufactured in Vietnam.

---

Ngày nhận bài: 12/7/2018

Ngày nhận bài sửa: 10/9/2018

Ngày chấp nhận đăng: 15/9/2018

---

## 1. GIỚI THIỆU

Hiện nay, trên thế giới đã và đang phát triển rất mạnh các sản phẩm về học thuật và chế tạo máy CNC và dạng chuyên động của các máy giống như máy CNC trong đó có máy khắc (cắt) laser. Việc sử dụng các máy khắc (cắt) laser nâng cao độ chính xác gia công và hiệu quả kinh tế, đồng thời cho phép rút ngắn được chu kỳ sản xuất vì có thể chạy ở vận tốc cao. Hiệu quả trong

quá trình cắt gọt hơn hẳn so với những máy phay, tiện CNC hiện nay. Do đó, hiện nay nhiều nước đã và đang ứng dụng rộng rãi vào lĩnh vực cơ khí chế tạo, đặc biệt chế tạo các khuôn mẫu chính xác, các chi tiết đòi hỏi độ chính xác và độ phức tạp cao. Sử dụng máy laser cho phép giảm khối lượng gia công chi tiết, nâng cao độ chính xác gia công và hiệu quả kinh tế, đồng thời rút ngắn được chu kỳ sản xuất. Mặc dù công nghệ gia công bằng máy khắc laser du nhập vào Việt Nam chậm hơn nhiều so với thế giới, nhưng trong một thời gian ngắn có thể nói công nghệ này đã có chỗ đứng tại Việt Nam và tin chắc trong những năm tới đây công nghệ này sẽ được dùng nhiều trong các xí nghiệp, phân xưởng, nhà máy, khu công nghiệp, khu công nghệ cao. So sánh giữa sự phát triển của việc áp dụng công nghệ khắc laser vào gia công trong nước và ngoài nước thì ở các nước phát triển tập trung vào gia công cơ khí chính xác như bánh răng xoắn, cánh tuabin... trong khi nước ta đa số tập trung nhiều vào lĩnh vực mặt hàng thủ công điêu khắc mỹ nghệ [1-6]. Như đã trình bày ở trên, ngành công nghiệp gia công cơ khí bằng máy khắc laser hiện nay đã và đang phát triển một cách nhanh chóng, đi kèm với đó là sự nghiên cứu, tìm hiểu về nguyên lý hoạt động của máy khắc laser cũng đóng vai trò đặc biệt quan trọng. Cụ thể là chúng ta đi sâu, nghiên cứu quá trình động lực học, hình thành cơ sở căn bản về khả năng hoạt động, từ đó cung cấp đáp ứng về tải trọng, lực, moment... để máy khắc laser có thể thực hiện được những gì ta mong muốn. Nhu cầu máy khắc laser càng nhiều, ta càng phải nghiên cứu về học thuật của máy, để hiểu, có thể tự chế tạo, cải tiến các loại máy phù hợp với thị trường Việt Nam, hạn chế việc nhập các loại máy khắc laser đắt tiền trên thế giới.

## 2. XÂY DỰNG BÀI TOÁN ĐỘNG HỌC

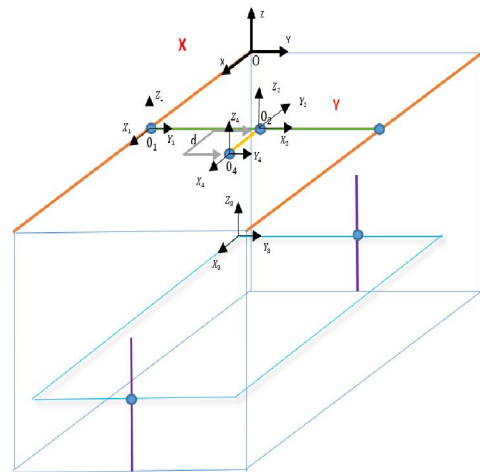
### 2.1. Bài toán động học thuận

Bài toán động học thuận nhằm xác định vận tốc, gia tốc của các khâu máy dựa trên tọa độ suy rộng và các ma trận chuyển đổi tọa độ của máy

Ta có, ma trận chuyển đổi tọa độ được xác định từ phương pháp ( ) cho 3 khâu:

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; {}^1T_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$${}^0T_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$



Hình 1. Sơ đồ động học máy khắc laser

Ma trận biến đổi vận tốc các góc tọa độ giữa các khâu của máy:

$${}^0V_1 = \dot{{}^0T_1} \times {}^0T_1^{-1} = \dot{x} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \dot{x} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$${}^1V_2 = {}^1\dot{T}_2 \times {}^1T_2^{-1} = \dot{y} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -y \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \dot{y} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Để xác định gia tốc, ta cần xác định đạo hàm cấp hai của các ma trận chuyển đổi tọa độ:

$${}^0\ddot{T}_1 = \frac{d}{dt}({}^0\dot{T}_1) = \ddot{x} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^1\ddot{T}_2 = \frac{d}{dt}({}^1\dot{T}_2) = \ddot{y} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Vậy gia tốc tương ứng các khâu của máy là:

$${}^0a_{o_1} = {}^0A_1 \times {}^0r_{o_1} = \ddot{x} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \ddot{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}^1a_{o_2} = {}^1A_2 \times {}^1r_{o_2} = \ddot{y} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \ddot{y} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}^0a_{o_2} = {}^0A_2 \times {}^0r_{o_2} = \left\{ \ddot{x} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \ddot{y} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \ddot{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \ddot{y} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ x \\ \ddot{y} \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5-6)$$

## 2.2. Bài toán động học ngược

Ta có, mối quan hệ giữa đầu laser và bàn máy là:

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \\ 1 \end{pmatrix} = {}^4DH_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ 1 \end{pmatrix} = {}^4DH_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+d \\ y \\ -z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Giả sử, đầu laser chuyển động theo các trục như sau:

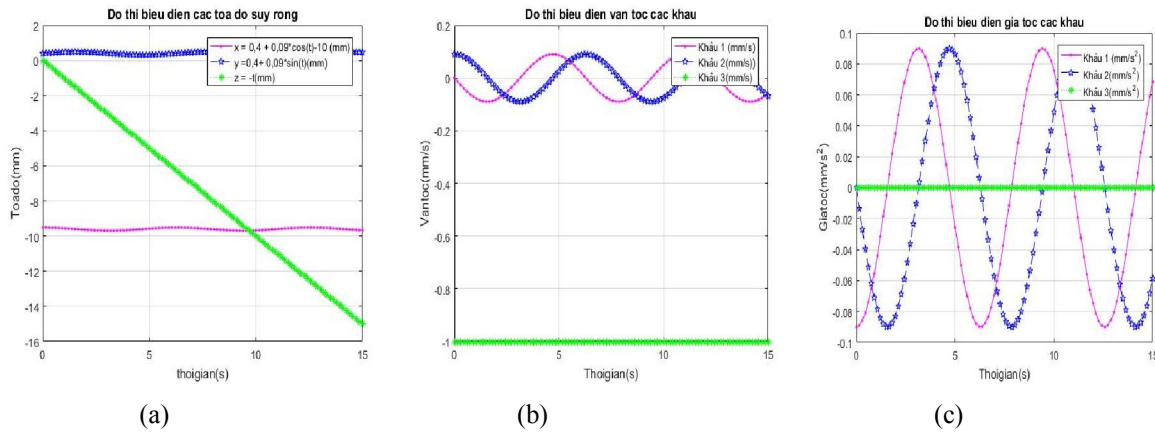
$$x_4 = 0,4 + 0,09\cos(t); \quad y_4 = 0,4 + 0,09\sin(t); \quad z_4 = z$$

Trong hệ tọa độ của máy, đầu laser chỉ chuyển động theo hai phương x, y. Tuy nhiên, có ba tọa độ suy rộng cần phải xác định trong ma trận truyền là x, y, z nên bài toán dư chuyển động.

Để có thể giải, ta đặt một tọa độ suy rộng có phương trình chuyển động cho trước, đối với hệ tọa độ như đã chọn, ta chọn tọa độ suy rộng  $z_3$  là hằng số, tức bàn máy chuyển động đều.

$$z_3 = t(\text{mm}); \quad \dot{z}_3 = 1(\text{mm} / \text{s}); \quad \ddot{z}_3 = 0(\text{mm} / \text{s}^2)$$

Kết quả thể hiện vị trí (tọa độ), vận tốc, gia tốc của các khâu:



Hình 2. Đồ thị biểu diễn vị trí, vận tốc gia tốc các khâu của máy

### 3. XÂY DỰNG BÀI TOÁN ĐỘNG LỰC HỌC

Bài toán động lực học nhằm mô phỏng chuyển động của các khâu máy khi biết các moment tạo ra từ động cơ (bài toán động lực học thuận) hoặc tính toán các moment cần thiết cung cấp cho quá trình điều khiển để thực hiện chuyển động mong muốn (bài toán động lực học nghịch).

#### 3.1. Bài toán động lực học thuận

Dựa trên phương pháp Newton Euler và phép đệ quy, phương pháp này dựa trên hệ lực cân bằng tác động lên khâu thứ  $i$ . Các lực tác động lên khâu thứ  $i$  là:

+ Lực  ${}^i F_i$  là lực quán tính do chuyển động tịnh tiến có gia tốc của khối lượng  $m_i$  của khâu thứ  $i$  gây nên. Lực này đặt tại tâm khối lượng  $C_i$  của khâu. Moment  ${}^i N_i$  là moment quán tính do chuyển động quay có gia tốc của khâu thứ  $i$  (có moment quán tính  $I_i$ ). Lực  ${}^{i+1} f_{i+1}$  là lực do khâu thứ  $i+1$  tác động lên khâu thứ  $i$  tại khớp  $i+1$ . Moment  ${}^{i+1} \eta_{i+1}$  là moment do khâu thứ  $i+1$  tác động lên khâu thứ  $i$  tại khớp  $i+1$ . Lực  ${}^i f_i$  là lực do khâu thứ  $i-1$  tác động lên khâu thứ  $i$  tại khớp  $i$ . Moment  ${}^i \eta_i$  là moment do khâu thứ  $i-1$  tác động lên khâu thứ  $i$  tại khớp  $i$ . Trong các lực này thì ta có thể xác định được các lực quán tính  ${}^i F_i$  và moment quán tính  ${}^i N_i$ , còn các lực  ${}^i f_i$ ,  ${}^{i+1} f_{i+1}$  và moment  ${}^i \eta_i$ ,  ${}^{i+1} \eta_{i+1}$  chưa biết. Nếu chỉ dựa vào 2 phương trình cân bằng lực và moment thì không thể xác định được 4 ẩn số này. Tuy nhiên, đối với khâu thứ  $n$  thì ta có thể xác định được lực  ${}^{n+1} f_{n+1}$  và moment  ${}^{n+1} \eta_{n+1}$  vì đó là các thành phần ngoại lực tác động lên khớp  $n+1$ . Do đó, dựa vào phương trình cân bằng lực và moment của khâu thứ  $n$  ta có thể xác định được các thành phần lực  ${}^n f_n$  và moment  ${}^n \eta_n$  tác động lên máy. Tiếp tục với khâu  $n-1$ , vì ta đã biết lực  ${}^n f_n$  và moment

${}^n\eta_n$  nên dựa vào phương trình cân bằng lực và mô men của khâu thứ n-1 ta có thể xác định được các thành phần lực  ${}^{n-1}f_{n-1}$  và moment  ${}^{n-1}\eta_{n-1}$  tác động lên khớp n-1. Quá trình được lặp lại với khâu n-2 cho đến khâu 1. Quá trình này được gọi là quá trình đệ qui.

Xác định các ma trận chuyển đổi tọa độ cần thiết:

$${}^1R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; {}^2R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Khung máy đứng yên, trục Z thẳng đứng:

$${}^0\omega_0 = 0; \quad {}^0\omega_0 = 0; \quad {}^0v_0 = (0 \quad 0 \quad g)^T$$

Với  ${}^0\omega_0$ ;  ${}^0\omega_0$ ;  ${}^0v_0$  lần lượt là vector vận tốc góc, gia tốc góc và vector gia tốc dài.

Khâu 1:

Vector vận tốc góc:  ${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}R_i {}^i\omega_i$  (Khớp tịnh tiến)

$$\Rightarrow {}^1\omega_1 = {}^1R_0 {}^0\omega_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times 0 = 0 \text{ (rad / s)}$$

Vector gia tốc góc:  ${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}R_i {}^i\omega_i$  (Khớp tịnh tiến)

$$\Rightarrow {}^2\omega_2 = {}^2R_1 {}^1\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times 0 = 0 \text{ (rad / s}^2\text{)}$$

Vector gia tốc dài:

$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}R \left[ {}^i v_i + d_i \hat{A}_i + 2({}^i\omega_i \times d_i \hat{A}_i) + {}^i\omega_i \times d_i \hat{B}_i + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times d_i \hat{A}_i) \right] \text{ (khớp tịnh tiến)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow {}^1v_1 &= {}^1R_0 \times {}^0v_0 + {}^1R_0 \times x \times \hat{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times x \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times x = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \text{ (mm / s)} \end{aligned}$$

Với  $d_i$ : là gia tốc dài của khớp thứ i;  $\hat{A}_i$ ,  $\hat{B}_i$ : là các vector đơn vị chỉ phương di chuyển của khâu thứ i+1. Khi đó, Vector gia tốc dài của tâm khối lượng:

$$\begin{aligned}
 {}^{i+1}\mathbf{v}_{C(i+1)} &= {}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}\mathbf{p}_{C(i+1)} + {}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times ({}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}\mathbf{p}_{C(i+1)}) + {}^{i+1}\mathbf{v}_{i+1} \\
 \Rightarrow {}^1\mathbf{v}_{C(1)} &= {}^1\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x & 0 & g \end{pmatrix}^T \quad (mm/s^2)
 \end{aligned}$$

Lực quán tính tại tâm khối lượng:

$${}^{i+1}\mathbf{F}_{i+1} = m_{i+1} {}^{i+1}\mathbf{v}_{C(i+1)} \Rightarrow {}^1\mathbf{F}_1 = m_1 {}^1\mathbf{v}_{C(1)} = m_1 \begin{pmatrix} x & 0 & g \end{pmatrix}^T \quad (N)$$

Với  $m_{i+1}$  là khối lượng của khâu  $i+1$

**Khâu 2:**

Vector vận tốc góc:

$${}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}\mathbf{R}_i {}^i\boldsymbol{\omega}_i \Rightarrow {}^2\boldsymbol{\omega}_2 = {}^2\mathbf{R}_1 {}^1\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times 0 = 0 \quad (rad/s)$$

Vector gia tốc góc:

$${}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}\mathbf{R}_i {}^i\boldsymbol{\omega}_i \Rightarrow {}^2\boldsymbol{\omega}_2 = {}^2\mathbf{R}_1 {}^1\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times 0 = 0 \quad (rad/s^2)$$

Vector gia tốc dài:

$$\begin{aligned}
 {}^{i+1}\mathbf{v}_{i+1} &= {}^{i+1}\mathbf{R} \left[ {}^i\mathbf{v}_i + d_i \hat{A}_i + 2({}^i\boldsymbol{\omega}_i \times d_i \hat{A}_i) + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times d_i \hat{B}_i + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times ({}^i\boldsymbol{\omega}_i \times d_i \hat{A}_i) \right] \\
 \Rightarrow {}^2\mathbf{v}_2 &= {}^2\mathbf{R}_1 \times {}^1\mathbf{v}_1 + {}^2\mathbf{R}_1 \times y \times \hat{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times y \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -x \\ g \end{pmatrix} + y \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ g \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Vector gia tốc dài của tâm khối lượng:

$$\begin{aligned}
 {}^{i+1}\mathbf{v}_{C(i+1)} &= {}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}\mathbf{p}_{C(i+1)} + {}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times ({}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}\mathbf{p}_{C(i+1)}) + {}^{i+1}\mathbf{v}_{i+1} \\
 \Rightarrow {}^2\mathbf{v}_{C(2)} &= {}^2\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ g \end{pmatrix} \quad (mm/s^2)
 \end{aligned}$$

Lực quán tính tại tâm khối lượng:

$${}^{i+1}F_{i+1} = m_{i+1} {}^{i+1}v_{C(i+1)} \Rightarrow {}^2F_2 = m_2 {}^2v_{C(2)} = m_2 \begin{pmatrix} y \\ -x \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_2 y \\ -m_2 x \\ m_2 g \end{pmatrix} (N) \quad (10)$$

**Tính lực và moment tại các khớp từ khớp n đến khớp 1:**

Lực tác động tại đầu laser:  ${}^4f_4 = 0$ ; moment tác động tại đầu laser:  ${}^4\eta_4 = 0$ ; Lực tác động lên khớp 2:

$${}^i f_i = {}^i F_i + {}^i R_{i+1} {}^{i+1} f_{i+1} \Rightarrow {}^2 f_2 = {}^2 F_2 = (m_2 + m_4) \begin{pmatrix} y \\ -x \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (m_2 + m_4) y \\ -(m_2 + m_4) x \\ (m_2 + m_4) g \end{pmatrix} (N) \quad (11)$$

Với  ${}^2 F_2 = (m_2 + m_4) \begin{pmatrix} y & -x & g \end{pmatrix}^T$  do khớp 2 và đầu laser gắn liền với nhau.

Lực tại khớp 2:

$$\tau_i = {}^i f_i^T \hat{A}_i \text{ (Khớp tịnh tiến)}$$

$$\Rightarrow \tau_2 = {}^2 f_2^T \hat{Y} = \begin{pmatrix} (m_2 + m_4) y & -(m_2 + m_4) x & (m_2 + m_4) g \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -(m_2 + m_4) x \quad (N)$$

Lực tác động lên khớp 1:

$$\begin{aligned} {}^i f_i = {}^i F_i + {}^i R_{i+1} {}^{i+1} f_{i+1} &\Rightarrow {}^1 f_1 = {}^1 F_1 + {}^1 R_2 {}^2 f_2 = \begin{pmatrix} m_1 x \\ 0 \\ m_1 g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (m_2 + m_4) y \\ -(m_2 + m_4) x \\ (m_2 + m_4) g \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_1 x \\ 0 \\ m_1 g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (m_2 + m_4) x \\ (m_2 + m_4) y \\ (m_2 + m_4) g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2 + m_4) x \\ (m_2 + m_4) y \\ (m_1 + m_2 + m_4) g \end{pmatrix} (N) \end{aligned} \quad (12)$$

Lực tại khớp 1:

$$\begin{aligned} \tau_i = {}^i f_i^T \hat{A}_i &\Rightarrow \tau_1 = {}^1 f_1^T \hat{X} = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2 + m_4) x & (m_2 + m_4) y & (m_1 + m_2 + m_4) g \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (m_1 + m_2 + m_4) x \quad (N) \end{aligned}$$

### 3.2. Bài toán động lực học ngược

Cơ sở lý thuyết: Sử dụng phương pháp Lagrange cho hệ hai bậc tự do. Phương pháp Lagrange sử dụng động năng (K) và thế năng (V) của cả hệ thống máy

#### Xét hệ máy 2 bậc tự do trong mặt phẳng Oxy có:

Xét  $m_1, m_2$ : lần lượt là khối lượng của khâu 1 và khâu 2;  $x, y$ : lần lượt là các tọa độ suy rộng tương ứng với từng khâu.

*Động năng của từng khâu:*

Khâu 1 chuyển động tịnh tiến,  $x$  là tọa độ suy rộng; Khâu 2 chuyển động tịnh tiến,  $y$  là tọa độ suy rộng, chuyển động của khâu 2 được tổng hợp bởi chuyển động khâu 1 và chính nó, khi đó động năng của khâu 1 và 2 được thể hiện như (13):

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2; K_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x} + \dot{y})^2 \quad (13)$$

Đầu laser chuyển động giống như chuyển động của khâu 2 nên động năng của nó là:

$$K_4 = \frac{1}{2} m_4 (\dot{x} + \dot{y})^2 \quad (14)$$

Tổng động năng của hệ:

$$\begin{aligned} \sum K &= K_1 + K_2 + K_4 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x} + \dot{y})^2 + \frac{1}{2} m_4 (\dot{x} + \dot{y})^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ (m_1 + m_2 + m_4) \dot{x}^2 + 2(m_2 + m_4) \dot{x} \dot{y} + (m_2 + m_4) \dot{y}^2 \right] \end{aligned} \quad (15)$$

*Thế năng của từng khâu:*

Thế năng của khâu 1; 2; 4 là  $V_1 = V_2 = V_4 = 0$ . Do đó, thế năng của cơ hệ:  $\sum V = 0$

Cơ hệ có hai bậc tự do, phương trình Lagrange khi này có dạng:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = Q_x; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} = Q_y \quad (16)$$

$$\text{Viết lại biểu thức động năng ở dạng: } K = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{x}^2 + 2a_{12} \dot{x} \dot{y} + a_{22} \dot{y}^2) \quad (16')$$

Theo biểu thức ở trên ta có:  $a_{11} = m_1 + m_2 + m_4$ ;  $a_{12} = m_2 + m_4$ ;  $a_{22} = m_2 + m_4$

$$\text{Viết lại biểu thức thế năng: } V = \frac{1}{2} (b_{11} \dot{x}^2 + 2b_{12} \dot{x} \dot{y} + b_{22} \dot{y}^2)$$

Theo (16), ta có:  $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$

Tính các đạo hàm, ta có:

$$\frac{\partial K}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = a_{11} \dot{x} + a_{12} \dot{y}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} \right) = a_{11} \ddot{x} + a_{12} \ddot{y}; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (17)$$



$$\frac{\partial K}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial K}{\partial y} = a_{22} \ddot{y} + a_{12} \ddot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{y}} \right) = a_{22} \dot{y} + a_{12} \dot{x}; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (17')$$

Chuyển thành dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} (m_1 + m_2 + m_4) & (m_2 + m_4) \\ (m_2 + m_4) & (m_2 + m_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} \quad (18)$$

Sử dụng các đạo hàm cấp 2 của các tọa độ suy rộng được xác định như sau:

$$\ddot{x} = -0,09 \cos(t); \quad \ddot{y} = -0,09 \sin(t)$$

Thay vào phương trình ta được:

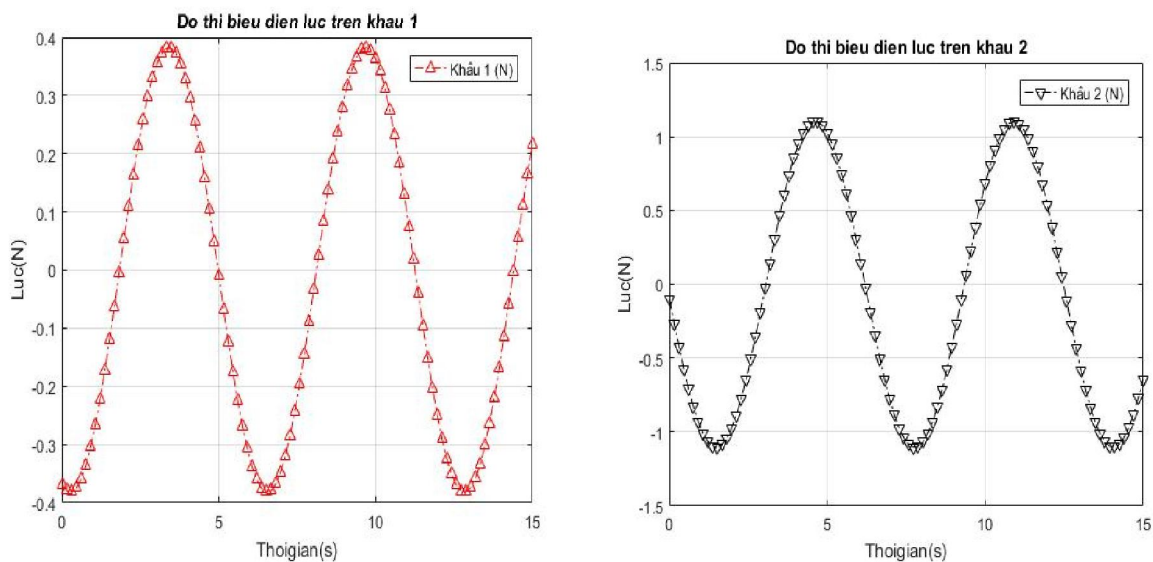
$$Q_x = -0,09(m_1 + m_2 + m_4) \cos(t) - 0,09(m_2 + m_4) \sin(t)$$

$$Q_y = -0,09(m_2 + m_4) \cos(t) - (m_2 + m_4) \sin(t)$$

**Bảng 1.** Thông số khối lượng của các khâu và đầu laser

Khâu 1	3 kg
Khâu 2	1 kg
Đầu laser	0,1 kg

Đồ thị biểu diễn lực trên khâu 1 và khâu 2:



**Hình 3.** Đồ thị biểu diễn lực trên khâu 1 và khâu 2

Nhận xét: Qua các ma trận tính toán được. Lực chủ yếu phụ thuộc vào gia tốc nên cũng sẽ thay đổi theo chu kỳ của gia tốc, khâu 1 có khối lượng và gia tốc lớn nên lực lớn.

#### 4. KẾT LUẬN

Dựa trên những kết quả nghiên cứu và tính toán thiết kế động học, động lực học máy khắc laser, ta có thể áp dụng vào một số các ngành sản xuất công nghiệp của nước ta. Nghiên cứu đã giải quyết các vấn đề động học, xây dựng các ma trận thể hiện mối liên hệ giữa mũi khắc và phôi như tọa độ, vận tốc, gia tốc. Hướng phát triển tiếp tục của đề tài sẽ áp các ma trận truyền, áp dụng các kiến thức được học để giải bài toán động lực học ngược, tìm lực, moment cần thiết cung cấp cho chuyển động của các khâu.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Phạm Đăng Phước. *Robot Công nghiệp*, NXB Hà Nội, 2006.
- [2]. Đỗ Sanh, *Động lực học máy*, NXB Khoa học Kỹ thuật, 2004.
- [3]. Ngô Kiều Nhi, *Dao động kỹ thuật*, NXB Đại học quốc gia TP. Hồ Chí Minh, 2016.
- [4]. Võ Đức Anh, Luận văn tốt nghiệp đại học ngành Cơ kỹ thuật - ĐH Bách Khoa TPHCM, GVHD: Nguyễn Quang Thành, bảo vệ tháng 6 năm 2016.
- [5]. Giáo trình trên máy tiện CNC, Bộ LĐTB&XH ban hành năm 2008
- [6]. Nguyễn Kinh Luân. *Giáo trình máy công cụ cắt gọt*. NXB Hà Nội, 2017