ÁP DỤNG ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG MONCH ĐỂ NGHIÊN CỨU TÍNH GIẢI ĐƯỢC CỦA MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN NGẪU NHIÊN TRUNG TÍNH CÓ HIỆU ỨNG XUNG

APPLY MONCH FIXED POINT THEORY TO STUDY THE SOLVABILITY FOR A CLASS OF IMPULSIVE NEUTRAL STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Lâm Trần Phương Thủy

TÓM TẮT

Trong bài báo này, tác giả sử dụng độ đo không compact Hausdorff và định lí điểm bất động Monch để chứng minh sự tồn tại nghiệm tích phân đối với một lớp phương trình vi phân ngẫu nhiên trung tính có hiệu ứng xung và chuyển động Brown bậc phân số (fBm) với nửa nhóm không compact trong không gian Hilbert.

Từ khóa: *Sự tồn tại nghiệm, chuyển động Brown bậc phân số, định lí điểm bất động Monch.*

ABSTRACT

In this paper, author use the Hausdorff measure of noncompactness and the Monch fixed point theorem to prove the existence of mild solutions for a class of impulsive neutral stochastic differential equations driven by a fractional Brownian motion (fBm) with noncompact semigroup in Hilbert spaces.

Keywords: *The existence, fractional Brownian motion, Monch fixed point theorem.*

Trường Đại học Điện lực
Email: thuyltp@epu.edu.vn
Ngày nhận bài: 20/02/2021
Ngày nhận bài sửa sau phản biện: 26/3/2021
Ngày chấp nhận đăng: 25/4/2021

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Gần đây, vấn đề nghiên cứu liên quan đến phương trình vi phân ngẫu nhiên với fBm đã được nhiều tác giả nghiên cứu, xem [1, 3, 6] và các tài liệu tham khảo trong đó. Tuy nhiên, cho đến nay các phương trình vi phân ngẫu nhiên trung tính với hiệu ứng xung được điều khiển bởi fBm với nửa nhóm không compact trong không gian Hilbert vẫn chưa được nghiên cứu nhiều. Vì vậy, bài báo này nghiên cứu sự tồn tại nghiệm tích phân đối với lớp phương trình vi phân ngẫu nhiên sau:

$$\begin{cases} d[x(t)-g(t,x_t)]=[Ax(t)+f(t,x_t)]dt \\ \qquad\qquad + \sigma(t)dB_Q^H(t), t\in J=[0,T], t\neq t_k, \\ \Delta x(t_k)=I_k(x_{t_k}), k=1,2,\dots,m, \\ x_0(t)=\phi(t)\in L^2(\Omega,\mathcal{B}_v),\ \text{a.e}\ t\in(-\infty,0], \end{cases} \quad (1)$$

trong đó, A là toán tử sinh của một nửa nhóm giải tích $(T(t))_{t\geq 0}$ các toán tử tuyến tính bị chặn trong không gian Hilbert X; B_Q^H là một fBm với tham số Hurst $H\in(1/2,1)$; $g,f:J\times\mathcal{B}_v\to X$ là các hàm thích hợp sẽ được xác định sau; Ở đây $I_k:\mathcal{B}_T\to X(k=1,2,\dots,m)$ là các hàm bị chặn và các thời gian cố định t_k thỏa mãn $0=t_0<t_1<\dots<t_k<\dots<t_m<T$, $x(t_k^+)$ và $x(t_k^-)$ là giới hạn bên phải và bên trái của x(t) tại thời điểm t_k. $\Delta x(t_k)=x(t_k^+)-x(t_k^-)$ là bước nhảy của hàm trạng thái x tại thời điểm t_k, trong đó I_k xác định kích thước của bước nhảy thứ k; hàm trễ $x_t:\Omega\to\mathcal{B}_v$ được định nghĩa bởi $x_t(\theta)=x(t+\theta)$ với $t\geq 0$ thuộc không gian pha $\mathcal{B}_v$ sẽ định nghĩa sau; dữ kiện đầu $\phi=\{\phi(t):-\infty<t\geq 0\}$ là một hàm $\mathcal{F}_0$ - đo được và là một $\mathcal{B}_v$ - quá trình ngẫu nhiên độc lập với fBm B_Q^H.

Các phần tiếp theo của bài báo được trình bày như sau: Phần 2, ta cung cấp một số ký hiệu và khái niệm cần thiết; Phần 3, ta thiết lập một số điều kiện đủ đảm bảo sự tồn tại nghiệm tích phân của hệ (1) với tham số Hurst $H\in(1/2,1)$; cuối cùng là Phần kết luận các kết quả đạt được của bài báo.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Cho X và Y là hai không gian Hilbert thực tách được và L(X, Y) là không gian các toán tử tuyến tính bị chặn từ Y đến X. Để thuận tiện, ta sử dụng chung kí hiệu $\|\cdot\|$ là chuẩn trong các không gian X, Y và L(X, Y). Giả sử $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ là không gian xác suất đầy đủ. Kí hiệu $\mathbb{E}(\cdot)$ là toán tử kì vọng toán tương ứng với xác suất $\mathbb{P}$. Toán tử không âm, tự liên hợp được kí hiệu là $Q\in L(Y,Y)$. L_Q^0 là không gian các hàm $\gamma\in L(Y,X)$ sao cho $\gamma Q^{1/2}$ là toán tử Hilbert-Schmidt với chuẩn được định nghĩa bởi

$$|\gamma|^2_{L_Q^0(Y,X)}=|\gamma Q^{\frac{1}{2}}|^2_{HS}=tr(\gamma Q\gamma^*)$$

 P-ISSN 1859-3585 | E-ISSN 2615-9619

Khi đó, γ được gọi là toán tử Q-Hilbert-Schmidt từ Y vào X.

Chúng ta nhắc lại một số kiến thức cơ bản về fBm và tích phân Wiener đối với fBm. Xét một khoảng thời gian [0, T] với T tùy ý và cho $\{B^H(t), t \in J\}$ là chuyển động Brown phân số một chiều với tham số Hurst $H \in (0,1)$. Điều này có nghĩa B^H là một quá trình trung tâm Gauss liên tục với hàm hiệp phương sai:

$$R_{H(t,s)} = \mathbb{E}[\beta^H(t)\beta^H(s)] = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}), t, s \in \mathbb{R}$$

Xét quá trình Wiener $\mathcal{W} = \{\mathcal{W}(t), t \in [0,T]\}$ định nghĩa bởi $\mathcal{W}(t) = B^H((K_H^*)^{-1} I_{[0,t]})$. Khi đó, B^H có biểu diễn tích phân Wiener sau: $B^H(t) = \int_0^t K_H(t,s)d\mathcal{W}(s)$. Ở đây nhân $K_H(t,s)$ cho bởi

$$K_H(t,s) = c_H s^{\frac{1}{2}-H}\int_s^t (\tau - s)^{H-\frac{3}{2}}\tau^{H-\frac{1}{2}}d\tau, t > s,$$

với $c_H = \sqrt{\dfrac{H(2H-1)}{\mathcal{B}(2-2H, H-\frac{1}{2})}}$ và $\mathcal{B}$ là hàm Beta.

Dễ thấy rằng

$$\frac{\partial K_H(t,s)}{\partial t} = c_H\left(\frac{t}{s}\right)^{H-\frac{1}{2}}(t-s)^{H-\frac{3}{2}}.$$

Xét toán tử tuyến tính $K_H^* : \Phi \to L^2([0,b])$, cho bởi

$$(K_H^*\varphi)(s) = \int_s^t \varphi(s)\frac{\partial K_H(t,s)}{\partial t}dt.$$

Ta có

$$(K_H^* \nu_{[0,t]})(s) = K_H(t,s)^* \nu_{[0,t]}(s).$$

K_H^* là một đẳng cự giữa Φ và $L^2([0,b])$ và có thể mở rộng đến không gian $\mathcal{H}$.

Giả sử dãy hai mặt của một fBm một chiều $\{B_n^H(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ độc lập trên $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ và xét chuỗi sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^H(t)u_n, t \geq 0.$$

Ở đây $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là cơ sở trực chuẩn đầy đủ trong Y. Chuỗi trên không nhất thiết hội tụ trong không gian Y. Xét quá trình ngẫu nhiên nhận giá trị trong Y, $B_Q^H(t)$ xác định bởi

$$B_Q^H(t) = \sum_{n-1}^{\infty} B_n^H(t)Q^{1/2}u_n = \sum_{n-1}^{\infty}\sqrt{\sigma_n}B_n^H(t)u_n, t \geq 0.$$

Chuỗi này hội tụ trong Y nếu Q thuộc lớp các toán tử vết không âm tự liên hợp. Rõ ràng, ta có $B_Q^H \in L^2(\Omega, Y)$. Tại thời điểm đó, $B_Q^H(t)$ là Q - hình trụ fBm nhận giá trị trong Y với toán tử hiệp phương sai Q. Chẳng hạn, nếu $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy số thực không âm bị chặn sao cho $Qu_n = \lambda_n u_n$, giả sử rằng Q là toán tử hạch trong Y (cụ thể $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n < \infty$), khi đó quá trình ngẫu nhiên

$$B_Q^H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^H(t)Q^{\frac{1}{2}}u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n)^{\frac{1}{2}}B_n^H(t)u_n, t \geq 0,$$

được định nghĩa như một Q - hình trụ fBm nhận giá trị trong Y.

Cho $\varphi : [0,T] \to L_Q^0(Y,X)$ sao cho

$$\sum_{n=1}^{\infty}\| K_H^*(\varphi Q^{\frac{1}{2}}u_n)\|_{L^2([0,T];X)} < \infty \tag{2}$$

Định nghĩa 2.1. Cho $\varphi(s), s \in [0,T]$ là hàm số nhận giá trị trong $L_Q^0(Y,X)$. Khi đó, tích phân Wiener của φ tương ứng với B_Q^H được định nghĩa bởi

$$\int_0^t \varphi(s)dB_Q^H(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \varphi(s)Q^{\frac{1}{2}}u_n d\beta_n^H$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t (K_H^*((K_H^*(\varphi Q^{\frac{1}{2}}u_n))(s)dW(s), t \geq 0.$$

Lưu ý rằng nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|\varphi Q^{\frac{1}{2}}u_n\|_{L^{1/H}([0,b];X)} < \infty, \tag{3}$$

thì (2) được thỏa mãn, điều này suy ra từ $L^{1/H}([0,b]) \subset L^2_{\mathcal{H}}([0,b])$.

Bổ đề 2.1. ([4]) Với mỗi $\varphi : [0,b] \to L_Q^0(Y,X)$ sao cho (5) thỏa mãn, và với mọi $\alpha, \beta \in [0,b]$ với $\alpha > \beta$,

$$\mathbb{E}\left|\int_\beta^\alpha \varphi(s)dB_Q^H(s)\right|_X^2$$
$$\leq cH(2H-1)(\alpha-\beta)^{2H-1}\sum_{n=1}^{\infty}\int_\beta^\alpha |\varphi(s)Q^{\frac{1}{2}}u_n|_X^2\, ds$$

ở đây c = c(H). Nếu, thêm nữa, $\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(t)Q^{\frac{1}{2}}u_n|_X$ hội tụ đều với $t \in [0,b]$, thì

$$\mathbb{E}\left|\int_\beta^\alpha \varphi(s)dB_Q^H(s)\right|_X^2 \leq cH(2H-1)(\alpha-\beta)^{2H-1}\int_\beta^\alpha |\varphi(s)|_{L_Q^0(Y,X)}\, ds$$

Trong bài báo này, ta định nghĩa không gian pha $\mathcal{B}_\nu$. Giả sử $\nu : (-\infty, 0] \to (0,\infty)$ là hàm liên tục với $l = \int_{-\infty}^0 \nu(t)dt < \infty$. Với $\tau > 0$, ta định nghĩa không gian Banach $(\mathcal{B}_\nu, \|\cdot\|_{\mathcal{B}_\nu})$ như sau

$\mathcal{B}_v=\{\xi:(-\infty,0]\to X:(\mathbb{E}\|\xi(\theta)\|^2)^{1/2}$ là hàm bị chặn và đo được trên $[-\tau,0]$ và $\int_{-\infty}^{0}\nu(s)\sup_{s\le\theta\le0}(\mathbb{E}\|\xi(\theta)\|^2)^{1/2}ds<\infty\}$

với chuẩn

$$\|\xi\|_{\mathcal{B}_v}=\int_{-\infty}^{0}\nu(s)\sup_{s\le\theta\le0}(\mathbb{E}\|\xi(\theta)\|^2)^{1/2}ds.$$

Và ta xét không gian

$\mathcal{B}_T=\{x:(-\infty,T]\to X:x_k\in C(J_k,X),k=0,1,\dots,m,\exists x(t_k^+),x(t_k^-)$ với $x(t_k)=x(t_k^-),k=0,1,\dots,m,x_0=\phi\in L^2(\Omega,\mathcal{B}_v)$ trên $(-\infty,0]\}$

Kí hiệu $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_T}$ là nửa chuẩn trên $\mathcal{B}_T$ định nghĩa bởi

$$\|x\|_{\mathcal{B}_T}=\|x_0\|_{\mathcal{B}_v}+\sup_{s\in J}(\mathbb{E}\|x(s)\|^2)^{1/2},x\in\mathcal{B}_T.$$

Bổ đề 2.2. ([5]) Giả sử rằng $x\in\mathcal{B}_T$, khi đó với $t\in J,x_t\in\mathcal{B}_v$. Hơn nữa

$$l(\mathbb{E}\|x(s)\|^2)^{1/2}\le\|x_t\|_{\mathcal{B}_v}\le\|x_0\|_{\mathcal{B}_v}+l\sup_{s\in J}(\mathbb{E}\|x(s)\|^2)^{1/2},x\in\mathcal{B}_T$$

với $l=\int_{-\infty}^{0}\nu(s)ds.$

Tiếp theo, cho $A:D(A)\to X$ (D(A): miền xác định của toán tử A) là toán tử sinh của một nửa nhóm giải tích các toán tử tuyến tính bị chặn $(T(t))_{t\ge0}$ trên X. Giả sử rằng tồn tại hằng số $M\ge1$ và số thực μ sao cho $\|T(t)\|\le Me^{\mu t}$, với mọi $t\ge0$. ta cũng giả thiết rằng $(T(t))_{t\ge0}$ bị chặn đều và là nửa nhóm giải tích sao cho $0\in\delta(A)$. Ở đây δ(A) là tập giải của A. Khi đó, ta có thể định nghĩa $(-A)^\alpha$ với $0<\alpha\le1$, như là một toán tử tuyến tính đóng với miền xác định $D(-A)^\alpha$ tương ứng với chuẩn $\|\cdot\|_\alpha$. Kí hiệu X_α ($0<\alpha\le1$) là không gian $D(-A)^\alpha$ với chuẩn $\|\cdot\|_\alpha$, ta có bổ đề sau

Bổ đề 2.3. [8] Giả sử có các giả thiết trên

(1) Nếu $0<\alpha\le1$, thì X_α là một không gian Banach.

(2) Nếu $0<\beta\le\alpha$, thì phép nhúng $X_\alpha\to X_\beta$ liên tục.

(3) Tồn tại hằng số $M_\alpha>0$ sao cho với mọi $0<\alpha\le1$, ta có

$$\|(-A)^\alpha T(t)\|\le\frac{M_\alpha}{t^\alpha}e^{-\mu t},t>0,\mu>0.$$

Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu độ đo không compact Hausdorff α(.) định nghĩa trên các tập con bị chặn B của không gian Banach X xác định bởi $\alpha(B)=\inf\{\epsilon>0;B$ có ϵ lưới hữu hạn trong X.

Một số tính chất được liệt kê trong Bổ đề sau.

Bổ đề 2.4. ([2]) Cho X là không gian Banach thực và $B,D\subset X$ là các tập bị chặn; khi đó các tính chất sau được thỏa mãn:

(1) B là compact yếu nếu và chỉ nếu α(B) = 0;

(2) $\alpha(B)=\alpha(\overline{B})=\alpha(convB)$, với $\overline{B}$ và convB tương ứng là bao đóng và bao lồi của B;

(3) $\alpha(B)\le\alpha(D)$ khi $B\subset D$;

(4) $\alpha(B+D)\le\alpha(B)+\alpha(D)$, với $B+D=\{x+y;x\in B,y\in D\}$;

(5) $\alpha(B\cup D)\le\max\{\alpha(B),\alpha(D)\}$;

(6) $\alpha(\lambda B)\le|\lambda|\alpha(B)$, với mỗi số thực λ;

(7) Nếu $W\subset C([0,T])$ là tập bị chặn, khi đó $\alpha(W(t))\le\alpha(W)$ với mọi $t\in[0,T]$, với $W(t)=\{u(t):u\in W\subset Y\}$. Hơn nữa, nếu W là đồng liên tục trên $[0,T]$ thì $t\to W(t)$ liên tục trên [0,T], và $\alpha(W)=\sup\{W(t):t\in[0,T]\}$;

(8) Nếu $W\subset C([0,T];X)$ bị chặn và đồng liên tục, khi đó $t\to\alpha(W(t))$ liên tục trên [0,T], và

$$\alpha\left(\int_0^t W(s)ds\right)\le\int_0^t\alpha(W(s))ds \text{ với mọi } t\in[0,T],$$

$$\text{với } \int_0^t W(s)ds=\left\{\int_0^t u(s)ds:u\in W\right\};$$

(9) Cho $\{u_n\}_1^\infty$ là dãy hàm khả tích Bochner từ J tới Y với $\|u_n(t)\|\le\hat{m}(t)$ hầu khắp $t\in J$ và mọi $n\ge1$, ở đây $\hat{m}(t)\in L(J,\mathbb{R}^+)$, khi đó hàm $\psi(t)=\alpha(\{u_n\}_{n=1}^\infty)\in L(J,\mathbb{R}^+)$ và thỏa mãn

$$\alpha\left(\left\{\int_0^t u_n(s)ds:n\ge1\right\}\right)\le2\int_0^t\psi(s)ds.$$

Với độ đo của số hạng tích phân ngẫu nhiên, ta có Bổ đề sau. Đây là Bổ đề quan trọng để chứng minh kết quả của nghiên cứu.

Bổ đề 2.5. Nếu $W\subset C([0,t];L_2^0(V,X)),\omega$ là một quá trình Winer, khi đó

$$\alpha\left(\int_0^t W(s)d\omega(s)\right)\le\sqrt{T}\alpha(W(t)),$$

ở đây

$$\int_0^t W(s)d\omega(s)=\int_0^t u(s)d\omega(s):\text{với mọi } u\in W,t\in[0,T]$$

Bổ đề 2.6. Giả sử rằng D là một tập lồi đóng của X, $0\in D$. Nếu ánh xạ $\Phi:D\to X$ liên tục và thuộc kiểu Monch nghĩa là, Φ thỏa mãn $M\subset D,M$ đếm được, $M\subset\overline{co}(\{0\}\cup\Phi(M))\Rightarrow\overline{M}$ compact, khi đó Φ có điểm bất động trong D.

3. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM

Trong phần này, sẽ trình bày và chứng minh sự tồn tại nghiệm tích phân của (1). Trước tiên cần đưa ra khái niệm nghiệm tích phân của bài toán đã nêu.

Định nghĩa 3.1. X - quá trình ngẫu nhiên $\{x(t), t \in (-\infty, T]\}$ được gọi là một nghiệm tích phân của (1), nếu

(i) x(t) đo được, $\mathcal{F}_t$ - tương thích;

(ii) Với $t \in (-\infty, 0], x(t) = \phi(t)$;

(iii) Với mỗi $0 \le t \le T, x(t)$ thỏa mãn đẳng thức tích phân sau:

$$\begin{aligned}x(t) &= T(t)[\phi(0) - g(0,\phi(0))] + g(t, x_t)\\ &+ \int_0^t AT(t-s)g(s,x_s)ds + \int_0^t T(t-s)f(s,x_s)ds\\ &+ \sum_{0<t_k<t} T(t-t_k)I_k(x_{t_k}) + \int_0^t T(t-s)\sigma(s)dB_Q^H(s).\end{aligned}$$

Trong phần tiếp theo, sử dụng các giả thiết sau:

(H1) A là toán tử sinh của một nửa nhóm giải tích $(T(t))_{t\ge 0}$ các toán tử tuyến tính bị chặn trên X, thỏa mãn $0 \in \rho(A)$. Từ Bổ đề 2.3, tồn tại các hằng số $M, M_{1-\beta}$ sao cho

$$\|T(t)\| \le M \text{ và } (-A)^{1-\beta}\|T(t)\| \le \frac{M_{1-\beta}}{t^{1-\beta}}, t \in J.$$

(H2) Hàm $\sigma: J \to L_Q^0(V, X)$ thỏa mãn

(i) $\int_0^t \|\sigma(s)\|_{L_Q^0}^2 ds < \infty, \forall t \in J$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \|\sigma Q^{1/2}u_n\|_{L^2([0,T];X)} < \infty$,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \|\sigma Q^{1/2}u_n\|_{X)}$ hội tụ đều với $t \in J$.

(H3) Hàm $g: J \times \mathcal{B}_v \to X$ thỏa mãn

(i) g là hàm liên tục và tồn tại các hằng số $0 < \beta \le 1, L_g > 0$, sao cho hàm g nhận giá trị trong X_β và thỏa mãn

$\|(-A)^\beta g(t,x) - (-A)^\beta g(t,y)\|^2 \le L_g\|x-y\|_{\mathcal{B}_v}^2$,

$\|(-A)^\beta g(t,x)\|^2 \le L_g(1 + \|x\|_{\mathcal{B}_v}^2)$,

với mọi $x, y \in \mathcal{B}_v$ và $t \in J$.

(ii) Tồn tại một hàm dương $l_g \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$, sao cho với mỗi tập bị chặn $Q_1 \subset \mathcal{B}_v$ thỏa mãn

$$\alpha((-A)^\beta g(t, Q_1)) \le l_g(t) \sup_{\theta\in(-\infty,0]} \alpha(Q_1(\theta)), Q^* = \sup_{t\in J} l_g(t).$$

(H4) Hàm $f: J \times \mathcal{B}_v \to X$ thỏa mãn

(i) Với mỗi $x \in \mathcal{B}_v, f(\cdot, x): J \to X$ đo được với mỗi $t \in J$, $f(t,\cdot): \mathcal{B}_v \to X$ liên tục.

(ii) Tồn tại hàm liên tục $m_f: J \to \mathbb{R}^+$ và một hàm liên tục, không giảm $\psi_f: \mathbb{R}^+ \to (0,\infty)$ sao cho $\|f(t,x)\|^2 \le m_f(t)\psi_f(\|x\|_{\mathcal{B}_v}^2)$.

(iii) Tồn tại hàm dương $l_f \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ sao cho, với mỗi tập con bị chặn $Q_2 \in \mathcal{B}_v$:

$$\alpha(f(t,x)) \le l_f(t) \sup_{\theta\in(-\infty,0]} \alpha(Q_2(\theta)).$$

(H5) Hàm liên tục $I_k: \mathcal{B}_T \to X$, thỏa mãn

(i) Tồn tại $L_k > 0, k = 1, 2, \ldots, m$ sao cho với mỗi $x, y \in \mathcal{B}_T$ và $\sum_{k=1}^m L_k < \infty$

$$\|I_k(x) - I_k(y)\|^2 \le L_k\|x-y\|_{\mathcal{B}_T}^2 \text{ và } \|I_k(0)\| = 0.$$

(ii) Tồn tại $l_k > 0, k = 1, 2, \ldots, m$ sao cho với mỗi tập con bị chặn $Q_3 \subset \mathcal{B}_T$

$$\alpha(I_k(Q_3)) \le l_k \sup_{\theta\in(-\infty,0]} \alpha(Q_3(\theta)).$$

(H6)
$$24\left(\|(-A)^{-\beta}\|^2 L_g + \frac{M_{1-\beta}^2 T^{2\beta}}{2\beta-1} L_g + M^2 m \sum_{k=1}^m L_k\right)l^2 + 6TM^2\int_0^t m_f(s)ds \limsup_{\ell\to\infty}\frac{\psi_f(\ell)}{\ell} < 1$$

Định lí 3.1. Nếu các giả thiết (H1)-(H6) được thỏa mãn thì hệ (1) có ít nhất một nghiệm tích phân trên $(-\infty, T]$ với

$$\begin{aligned}&\|(-A)^{-\beta}\|Q^* + 2\frac{M_{1-\beta}T^\beta}{\beta}\|l_g\|_{L^1(J,\mathbb{R}^+)}\\ &+ MT\|l_f\|_{L^1(J,\mathbb{R}^+)} + M\sum_{n=1}^m l_k < 1.\end{aligned} \tag{4}$$

Chứng minh

Xét toán tử $\Gamma: \mathcal{B}_T \to \mathcal{B}_T$ định nghĩa bởi

$$\Gamma x(t) = \begin{cases}\phi(t), t \in (-\infty, 0]\\ T(t)[\phi(0) - g(0,\phi(0))] + g(t,x_t)\\ + \int_0^t AT(t-s)g(s,x_s)ds + \int_0^t T(t-s)f(s,x_s)ds\\ + \sum_{0<t_k<t} T(t-t_k)I_k(x_{t_k}) + \int_0^t T(t-s)\sigma(s)dB_Q^H(s), t \in J.\end{cases} \tag{5}$$

Để chứng minh sự tồn tại nghiệm tích phân của (1), ta cần chứng minh Γ có điểm bất động.

Xét $\mathcal{B}_T^0 = \{y : y \in \mathcal{B}_T, y_0 = 0\}$, với mỗi $y \in \mathcal{B}_T^0$, định nghĩa chuẩn

$$\|y\|_{\mathcal{B}_T^0} = \|y_0\|_{\mathcal{B}_v} + \sup_{s\in J}(\mathbb{E}\|y(s)\|^2)^{1/2} = \sup_{s\in J}(\mathbb{E}\|y(s)\|^2)^{1/2}.$$

Khi đó, $(\mathcal{B}_T^0, \|\cdot\|_{\mathcal{B}_T^0})$ là một không gian Banach. Với mỗi r > 0, xét $\bar{B}_r = \{y \in \mathcal{B}_T^0 : \|y\|^2_{\mathcal{B}_T^0} < r\}$, khi đó $\bar{B}_r$ là tập lồi đóng và bị chặn trong $\mathcal{B}_T^0$. Với mỗi $y \in \bar{B}_r$, ta có

$$\|y_t + \hat{\phi}_t\|^2_{\mathcal{B}_v} \le 4l^2(r + M^2|\phi(0)|^2) + 4\|\hat{\phi}\|^2_{\mathcal{B}_v} := r' \quad (6)$$

với $\hat{\phi}(t) = \begin{cases} \phi(t), t \in (-\infty, 0] \\ T(t)\phi(0), t \in J. \end{cases}$

Bây giờ ta định nghĩa toán tử $\Phi : \mathcal{B}_T^0 \to \mathcal{B}_T^0$ bởi

$$\Phi y(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0] \\ T(t)[-g(0,\phi(0))] + g(t, y_t + \hat{\phi}_t) \\ +\int_0^t AT(t-s)g(s, y_s + \hat{\phi}_s)ds + \int_0^t T(t-s)f(s, y_s + \hat{\phi}_s)ds \\ +\sum_{0<t_k<t} T(t-t_k)I_k(y_{t_k} + \hat{\phi}_{t_k}) + \int_0^t T(t-s)\sigma(s)dB_Q^H(s), t \in J \end{cases} \quad (7)$$

Rõ ràng, việc chứng minh toán tử Γ có điểm bất động tương đương với việc chứng minh toán tử Φ có điểm bất động. Để dễ đọc hơn, tác giả chia chứng minh thành các bước như sau.

Bước 1: Tồn tại số thực dương r sao cho $\Phi(\bar{B}_r) \subset \bar{B}_r$. Giả sử ngược lại rằng $\Phi(\bar{B}_r) \not\subset \bar{B}_r$, khi đó với mỗi số thực dương r, tồn tại hàm $y^r \in \bar{B}_r$ nhưng $\Phi(y^r) \notin \bar{B}_r$, điều này suy ra tồn tại $t = t(r) \in J, \mathbb{E}\|(\Phi y^r)(t)\|^2 > r$. Thực tế, ta có

$$\begin{aligned} r < \mathbb{E}\|(\Phi y^r)(t)\|^2 &\le 6\mathbb{E}\|T(t)[-g(0,\phi(0))]\|^2 \\ &+ 6\mathbb{E}\|g(t, y_t^r + \hat{\phi}_t)\|^2 + 6\mathbb{E}\|\int_0^t AT(t-s)g(s, y_s + \hat{\phi}_s)ds\|^2 \\ &+ 6\mathbb{E}\|\int_0^t T(t-s)f(s, y_s + \hat{\phi}_s)ds\|^2 \\ &+ 6\mathbb{E}\|\sum_{0<t_k<t} T(t-t_k)I_k(y_{t_k} + \hat{\phi}_{t_k})\|^2 \\ &+ 6\mathbb{E}\|\int_0^t T(t-s)\sigma(s)dB_Q^H(s)\|^2 := \sum_{i=1}^6 J_i \end{aligned} \quad (8)$$

Sử dụng **Bổ đề 2.1** và các giả thuyết (H1)-(H5) ta có

$$J_1 = 6\mathbb{E}\|T(t)[-g(0,\phi(0))]\|^2 \le 6M^2\|(-A)^{-\beta}\|^2 L_g(1 + \|\phi\|^2_{\mathcal{B}_v}) \quad (9)$$

$$J_2 = 6\mathbb{E}\|g(t, y_t^r + \hat{\phi}_t)\|^2 \le 6\|(-A)^{-\beta}\|^2 L_g(1 + r') \quad (10)$$

$$\begin{aligned} J_3 &= 6\mathbb{E}\|\int_0^t (-A)^{1-\beta}T(t-s)(-A)^{\beta}g(s, y_s + \hat{\phi}_s)ds\|^2 \\ &\le 6\frac{M_{1-\beta}^2 T^{2\beta}}{2\beta-1}L_g(1+r') \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} J_4 &= 6\mathbb{E}\|\int_0^t T(t-s)f(s, y_s + \hat{\phi}_s)ds\|^2 \\ &\le 6TM^2\int_0^t m_f(s)\psi_f(r')ds \end{aligned} \quad (12)$$

$$J_5 = 6\mathbb{E}\|\sum_{0<t_k<t} T(t-t_k)I_k(y_{t_k} + \hat{\phi}_{t_k})\|^2 \le 6M^2 m\sum_{k=1}^m L_k r' \quad (13)$$

$$\begin{aligned} J_6 &= 6\mathbb{E}\|\int_0^t T(t-s)\sigma(s)dB_Q^H(s)\|^2 \\ &\le 6cM^2H(2H-1)T^{2H}\sup_{0\le s\le T}\|\sigma(s)\|^2_{L_Q^0} \end{aligned} \quad (14)$$

Từ các bất đẳng thức (9)-(14), suy ra

$$\begin{aligned} r < \sum_{i=1}^6 J_i &\le 6\left[\|(-A)^{-\beta}\|^2 L_g + \frac{M_{1-\beta}^2 T^{2\beta}}{2\beta-1}L_g + M^2 m\sum_{k=1}^m L_k\right] \\ &+ 6M^2\|(-A)^{-\beta}\|^2 L_g(1 + \|\phi\|^2_{\mathcal{B}_v}) + 6\|(-A)^{-\beta}\|^2 L_g \\ &+ 6\frac{M_{1-\beta}^2 T^{2\beta}}{2\beta-1}L_g + 6cM^2H(2H-1)T^{2H}\sup_{0\le s\le T}\|\sigma(s)\|^2_{L_Q^0} \\ &+ 6TM^2\int_0^t m_f(s)\psi_f(r')ds. \end{aligned} \quad (15)$$

Chia hai vế của (15) cho r và cho $r \to +\infty$, biết rằng

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r'}{r} = \lim_{r\to\infty}\frac{4l^2(r + M^2|\phi(0)|^2) + 4\|\hat{\phi}\|^2_{\mathcal{B}_v}}{r} = 4l^2.$$

Ta có

$$24\left(\|(-A)^{-\beta}\|^2 L_g + \frac{M_{1-\beta}^2 T^{2\beta}}{2\beta-1}L_g + M^2 m\sum_{k=1}^m L_k\right)l^2$$
$$+6TM^2\int_0^t m_f(s)ds \limsup_{\ell\to\infty}\frac{\psi_f(\ell)}{\ell} \ge 1.$$

Điều này mâu thuẫn với (H6). Do đó, tồn tại số thực dương r sao cho $\Phi(\bar{B}_r) \subset \bar{B}_r$.

Bước 2: Toán tử Φ liên tục trong $\bar{B}_r$. Điều này suy ra từ tính liên tục của các hàm g, f và các hàm I_k và định lí hội tụ trội Lebesgue.

Bước 3: Toán tử $\Phi(\bar{B}_r)$ là đồng liên tục trên J.

Dễ thấy rằng hàm $\{\Phi y : y \in \bar{B}_r\}, t = 0$ là đồng liên tục. Với $0 < t_1 < t_2 \le T, t_1, t_2 \in J$ và $y \in \bar{B}_r$ nhờ các giả thiết trên, ta có

$$\begin{aligned} 6\mathbb{E}\|\Phi y(t_2) - \Phi y(t_1)\|^2 &\le 6(Q^*)^2\mathbb{E}\|T(t_2) - T(t_1)\|^2 \\ &+ 6\mathbb{E}\|g(t_2, y_{t_2} + \hat{\phi}_{t_2}) - g(t_1, y_{t_1} + \hat{\phi}_{t_1})\| \\ &+ 12\mathbb{E}\|\int_0^{t_1}(-A)^{1-\beta}[T(t_2-s) - T(t_1-s)](-A)^{\beta}g(s, y_s + \hat{\phi}_s)ds\|^2 \\ &+ 12\mathbb{E}\|\int_{t_1}^{t_2} AT(t_2-s)g(s, y_s + \hat{\phi}_s)ds\|^2 \end{aligned}$$

$$+12\mathbb{E}\|\int_0^{t_1}[T(t_2-s)-T(t_1-s)]\ f(s,y_s+\hat{\phi}_s)ds\|^2$$

$$+12\mathbb{E}\|\int_{t_1}^{t_2}T(t_2-s)f(s,y_s+\hat{\phi}_s)ds\|^2$$

$$+6\mathbb{E}\|\sum_{k=1}^{m}[T(t_2-t_k)-T(t_1-t_k)]\ I_k(y_{t_k}+\hat{\phi}_{t_k})\|^2$$

$$+12\mathbb{E}\|\int_0^{t_1}[T(t_2-s)-T(t_1-s)]\sigma(s)dB_Q^H(s)\|^2$$

$$+12\mathbb{E}\|\int_{t_1}^{t_2}T(t_2-s)\sigma(s)dB_Q^H(s)\|^2\to 0$$

khi $t_2\to t_1$. Suy ra $\{\Phi y: y\in\overline{B}_r\}$ là tập đồng liên tục trên J.

Bước 4: Ta kiểm tra điều kiên Monch được thỏa mãn.

Xét tập khác rỗng, bị chặn $W^*\subset\mathcal{B}_T^0$ và $y_1,y_2\in W^*$.

Ta có: $d(\Phi y_1(t),\Phi y_2(t))=d(\hat{\Phi}y_1(t),\hat{\Phi}y_2(t))$

suy ra $\alpha(\Phi y(t))=\alpha(\hat{\Phi}y(t)), y\in W^*$.

Cho $D\subset\overline{B}_r$ là tập đếm được và $D\subset\overline{co}(\{0\}\cup\Phi(D))$. Bây giờ, ta chứng minh $\alpha(D)=0$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng $D=\{y^n\}_{n=1}^{\infty}$. Nhờ Bước 3 ta thấy $D\subset\overline{co}(\{0\}\cup\Phi(D))$ là đồng liên tục trên J.

Theo Bổ đề 2.4 và các giả thiết trên, ta có

$$\alpha(\Phi\{y^n(t)\}_{n=1}^{\infty})=\alpha(\hat{\Phi}\{y^n(t)\}_{n=1}^{\infty})$$

$$\le\begin{pmatrix}\|(-A)^{-\beta}\|Q^*+2\dfrac{M_{1-\beta}T^{\beta}}{\beta}\|l_g\|_{L^1(J,\mathbb{R}^+)}\\ +MT\|l_f\|_{L^1(J,\mathbb{R}^+)}+M\sum\limits_{n=1}^{m}l_k\end{pmatrix}\alpha(\{y^n(t)\}_{n=1}^{\infty})$$

$$=M^*\alpha(\{y^n(t)\}_{n=1}^{\infty}),$$

với

$$M^*=\|(-A)^{-\beta}\|Q^*+2\frac{M_{1-\beta}T^{\beta}}{\beta}\|l_g\|_{L^1(J,\mathbb{R}^+)}+MT\|l_f\|_{L^1(J,\mathbb{R}^+)}+M\sum_{n=1}^{m}l_k<1.$$

Do đó, suy ra

$$\alpha(D)\le\alpha(\overline{co}(\{0\}\cup\Phi(D)))\le M^*\alpha(D).$$

Điều này chứng tỏ α(D) = 0, D là tập compact tương đối. Nhờ Bổ đề 2.6, ta thấy rằng Φ có điểm bất động trên D. Định lí được chứng minh.

4. KẾT LUẬN

Kết quả chính của bài báo này là sử dụng các kiến thức liên quan đến giải tích ngẫu nhiên, độ đo không compact và nguyên lí điểm bất động Monch để chứng minh sự tồn tại nghiệm tích phân của bài toán (1).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] G. Arthi, J. H. Park, H. Jung, 2016. *Existence and exponential stability for neutral stochastic integrodifferential equations with impulses driven by a fractional brownian motion*. Commun Nonlinear Sci Numer Simul. 32, 145-157.

[2] J. Banas, K. Goebel, 1980. *Measure of Noncompactness in Banach spaces*. Marcel Dekker, New York.

[3] B. Boufoussi, S. Hajji, 2012. *Neutral stochastic functional differential equations driven by a fractional brownian motion in a hilbert space*. Stat.Probab. Lett. 82, 1549-1558.

[4] T. Caraballo, M. Garrido-Atienza, T. Taniguchi, 2011. *The existence and exponential behavior of solutions to stochastic delay evolution equations with a fractional brownian motion*. Nonlinear Anal. 67, 3671-3684.

[5] Y.K. Chang, 2007. *Controllability of impulsive functional differential systems with infinite delay in banach spaces*. Chaos Soliton. Fract. 33, 1601-1609.

[6] J. Cui, Z. Wang, 2016. *Nonlocal stochastic integro-differential equations driven by fractional brownian motion*. Adv. Differ. Equ. 115.

[7] Y. Mishura, 2008. *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*. In: Lecture Notes in Mathematics,1929; Springer-Verlag.

[8] A. Pazy, 1992. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Spring Verlag, New York.

AUTHOR INFORMATION

Lam Tran Phuong Thuy

Electric Power University